Théorème de Kuratowski
Preuve de l'égalité FCFCFCF=FCF

blogdemaths.wordpress.com

Soit X un espace topologique et A une partie de X. On note :

- $F(A)$ la fermeture de A dans X ;
- $C(A)$ le complémentaire de A dans X.

Le but de ce document est de prouver que pour toute partie A,

$$FCFCFCF(A) = FCF(A)$$

Pour cela, nous utiliserons les propriétés suivantes, faciles à démontrer :

$$U \subset F(U) \tag{1}$$
$$FF(U) = F(U) \tag{2}$$
$$CC(U) = U \tag{3}$$
$$U \subset V \Longrightarrow F(U) \subset F(V) \tag{4}$$
$$U \subset V \Longrightarrow C(U) \supset C(V) \tag{5}$$

où U et V désignent deux parties quelconque de X.

1 Un premier lemme

Lemme. *Pour toute partie A,*

$$CFC(A) \subset A$$

Démonstration. On applique la propriété (1) à $U = C(A)$:

$$C(A) \subset FC(A)$$

Puis on applique la propriété (5) à l'inclusion précédente :

$$CC(A) \supset CFC(A)$$

et on conclut à l'aide de la propriété (3) :

$$A \supset CFC(A)$$

□

Remarque : Pour ceux qui ont des rudiments de topologie, la partie $CFC(A)$ est en fait l'intérieur de A. Il n'est donc pas étonnant qu'elle soit incluse dans A !

2 Démonstration de $FCFCFCF = FCF$

Pour montrer que pour toute partie A, $FCFCFCF(A) = FCF(A)$, nous allons procéder par double inclusion.

Proposition. *Pour toute partie A,*

$$FCFCFCF(A) \subset FCF(A)$$

Démonstration. D'après le lemme, quelque soit la partie U, on a

$$CFC(U) \subset U$$

En appliquant cela à $U = FCF(A)$, on obtient :

$$CFC(FCF(A)) \subset FCF(A)$$

c'est-à-dire

$$CFCFCF(A) \subset FCF(A)$$

On applique alors la propriété (4) :

$$FCFCFCF(A) \subset FFCF(A)$$

et on termine grâce à la propriété (2), qui nous dit que $FF = F$:

$$FCFCFCF(A) \subset FCF(A)$$

□

Proposition. *Pour toute partie A,*

$$FCF(A) \subset FCFCFCF(A)$$

Démonstration. D'après le lemme,

$$CFC(F(A)) \subset F(A)$$

Donc, en appliquant la propriété (4), on obtient :

$$FCFCF(A) \subset FF(A)$$

ce qui, d'après la propriété (2), se simplifie en :

$$FCFCF(A) \subset F(A)$$

On applique ensuite la propriété (5) :

$$CFCFCF(A) \supset CF(A)$$

et on termine grâce à la propriété (4) :

$$FCFCFCF(A) \supset FCF(A)$$

□